Раздел 2. **Моделирование и компьютерный эксперимент**

А2, В9 Задачи на графах

Конспект

Граф — это один из способов графического представления информации, отражающий количество объектов изучаемой системы и взаимосвязи между ними.

Объекты, отраженные в графе, представлены в нём как **вершины (узлы)** графа, а связи между ними — как **дуги (рёбра)**. Таким образом, граф представляет собой совокупность непустого множества вершин и множества связей между вершинами.

Количество вершин графа называют его **порядком.** Количество рёбер называют **размером** графа.

Рёбрам графа могут быть сопоставлены числовые значения, которые называют **весами** рёбер. Например, вес ребра в графе, обозначающем дорожную сеть, может представлять собой длину соответствующей дороги между вершинами графа, обозначающими населённые пункты. Граф, рёбрам которого назначены значения весов, называют **взвешенным.**

Две вершины называют **концевыми вершинами (концами)** ребра, которое их соединяет. При этом говорят, что ребро **инцидентно** каждой из соединяемых им вершин, и наоборот, каждая концевая вершина называется **инцидентной** соединяющему их ребру. Две концевые вершины одного и того же ребра называют **соседними.**

Рёбра, имеющие общую концевую вершину, называют **смежными.**

Рёбра, инцидентные одной и той же паре вершин (т.е. соединяющие одну и ту же пару вершин) называют **кратными**, или **параллельными.** Граф с кратными рёбрами называют **мультиграфом.**

Ребро, концами которого является одна и та же вершина, называется **петлёй.** Граф, содержащий петли (и кратные рёбра), называют **псевдографом.**

Степенью вершины называют количество инцидентных ей (исходящих из неё) рёбер, при этом петли, замкнутые на эту вершину, входят в подсчёт дважды.

Вершина называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра. Вершина называется **висячей (листом)**, если она является концом ровно одного ребра.

Пустой граф — граф, состоящий из произвольного количества изолированных вершин (т.е. не имеющий рёбер).

Полный граф — граф, не имеющий петель и кратных рёбер, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

Путь (цепь) в графе — конечная последовательность вершин, каждая из которых (кроме последней) соединена со следующей вершиной ребром. **Циклом** называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (или цикл) называют **простым**, если рёбра в нём не повторяются. Простой путь (цикл) называют **элементарным**, если вершины в нём не повторяются.

Длиной пути (или цикла) называют количество составляющих его рёбер.

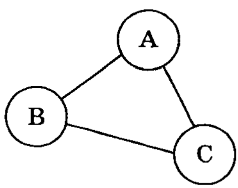
Связный граф — граф, в котором для любых двух вершин существует связывающий их путь.

Сильно связный граф — ориентированный граф, в котором существует маршрут из любой вершины в любую другую.

Неориентированный граф

В неориентированном графе связи между любыми парами концевых вершин являются двунаправленными, т.е. эти концевые вершины «равноправны» по отношению к этой связи.

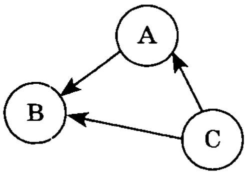
Пример неориентированного графа:



Ориентированный граф (орграф)

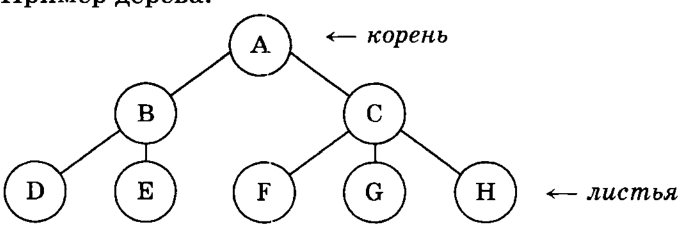
В ориентированном графе связи между концевыми вершинами являются направленными. Рёбра ориентированного графа называют **дугами.** Пути в ориентированном графе называют **ориентированными путями (маршрутами).** Замкнутый путь (цикл) в ориентированном графе называют **контуром.** Ориентированный граф, в котором каждая пара концевых вершин связана только одной дугой, называют **направленным** (в отличие от него, в простом ориентированном графе какие-то вершины могут быть соединены двумя дугами, имеющими противоположные направления). Полный направленный граф называют **турниром.** Ориентированный граф, полученный из исходного путём смены направлений рёбер на противоположные, называют **обратным.**

Пример ориентированного графа (является направленным, турниром):



Дерево — граф, в котором существует один-единственный путь между любой парой вершин и не имеется ни одного цикла. **Ориентированное (направленное) дерево** — орграф, в котором существует один-единственный маршрут между любой парой вершин и не имеется ни одного контура. Одна из вершин дерева (его **корень**) не имеет входящих в неё дуг, а все остальные вершины имеют ровно одну входящую дугу. При этом вершины, не имеющие исходящих из них дуг, называются **листьями.**

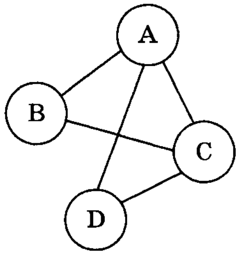
Пример дерева:



Двоичное дерево — ориентированное дерево, в котором для каждой вершины количество исходящих из неё дуг не превосходит двух.

Способы представления графов

1. **Графический способ** — изображение графа.
Пример:



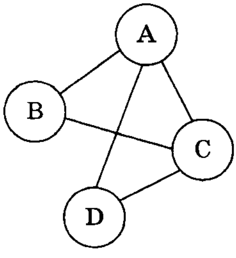
2. **Список рёбер** — перечисление всех рёбер графа как пар обозначений связываемых этими рёбрами вершин.

Пример: {A,B}, {A,D}, {A,C}, {B,C}, {C,D}

3. **Матрица смежности** — квадратная симметричная таблица (матрица), в которой и столбцы, и строки соответствуют вершинам графа, а в ячейках на их пересечении записываются числа, обозначающие наличие или отсутствие связей между соответствующими парами вершин (обычно — количество связей между вершинами).

В простейшем случае, когда граф не имеет кратных рёбер и петель, матрица смежности содержит единицы для ячеек, соответствующих парам вершин, связанных ребром, и нули — для несвязанных вершин.

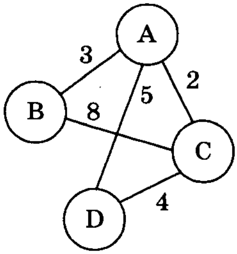
Пример:



	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	1	0	1	0

Для взвешенного графа возможен вариант матрицы смежности, где в ячейках записываются веса рёбер или нули (либо ячейки оставляются пустыми).

Пример:



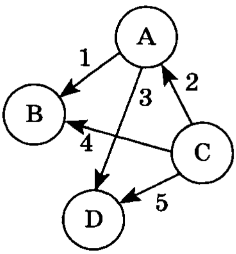
	A	B	C	D
A		3	2	5
B	3		8	
C	2	8		4
D	5		4	

4. **Матрица инцидентности** — таблица, столбцы которой соответствуют вершинам, а строки — рёбрам. При этом в ячейках на их пересечении записываются числа:

— для неориентированного графа — число 1, если данная вершина инцидентна данному ребру, или 0 — в противном случае;

— для ориентированного графа — число −1, если данная дуга исходит из данной вершины, число 1, если данная дуга входит в данную вершину, число 2, если дуга представляет собой петлю, или 0 — в противном случае.

Пример:



	A	B	C	D
1	−1	1	0	0
2	1	0	−1	0
3	−1	0	0	1
4	0	1	−1	0
5	0	0	−1	1

Разбор типовых задач

Задача 1*. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

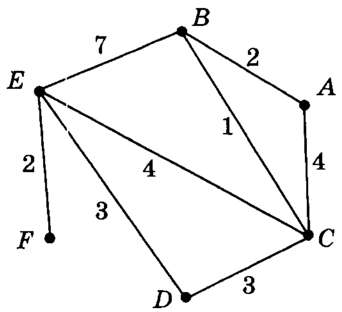
Решение

Это типичная задача на построение графов по заданной матрице смежности. Вершинами искомого графа (карты городов) являются названия городов, обозначенные буквами от A до F, а рёбра определяются наличием в таблице чисел, указывающих веса этих рёбер.

Построение такого графа — первый шаг решения задачи. Для этого достаточно разметить точки A, B, C, D, E, F и соединить линиями те из них, для которых на пересечении строки и столбца таблицы имеется непустая ячейка. Число, находящееся в этой ячейке, нужно записать над соответствующим ребром.

Поскольку граф в данном случае не является ориентированным (в условии не указано, что можно двигаться по дорогам только в одном направлении, значит, возможно и встречное движение), его матрица смежности зеркально симметрична относительно главной диагонали (выделенной серым фоном ячеек). Поэтому, при рисовании графа достаточно просмотреть, например, только ячейки над главной диагональю.

Для данной таблицы (матрицы смежности) получается граф следующего вида:



Остаётся перебрать все возможные пути от вершины A к вершине F. При этом обратить внимание, что любой такой путь заканчивается одинаково — отрезком EF:

$ABEF$ — длина пути: $2 + 7 + 2 = 11$;

$ABCEF$ — длина пути: $2 + 1 + 4 + 2 = 9$;

$ACEF$ — длина пути: $4 + 4 + 2 = 10$;

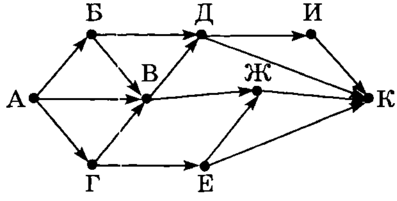
$ABCDEF$ — длина пути: $2 + 1 + 3 + 3 + 2 = 11$;

$ACDEF$ — длина пути: $4 + 3 + 3 + 2 = 12$.

Из них самый короткий — путь $ABCEF$ длиной 9 единиц.

Ответ: 9 (вариант ответа №1).

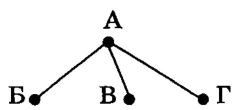
Задача 2*. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



Решение

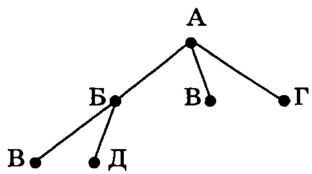
Предложенная схема дорог представляет собой ориентированный граф. Нужно проследить *все* возможные пути от вершины А до вершины К. Чтобы при этом не пропустить ни одного возможного варианта, строится второй граф — *дерево вариантов*. (Такой граф чем-то похож на деревья ходов игроков, которые требуется строить при решении задач С3, посвящённых определению выигрышных ходов в играх «в камешки».)

В самом начале нашего дерева вычерчивается «корневая» вершина А и от неё — три ветви к вершинам Б, В и Г:

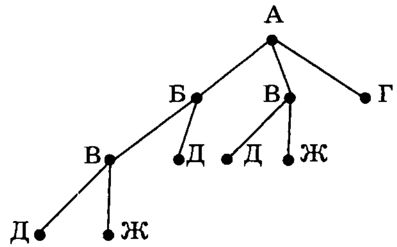


Эта же операция — выяснение, к скольким другим вершинам ведут рёбра, и вычерчивание соответствующих ветвей дерева — повторяется для каждой из получившейся концевых вершин (Б, В и Г), а затем — для новых концевых вершин, которые будут получаться на каждом новом шаге. При этом какие-то обозначения (буквы) могут повторяться в разных ветвях строящегося дерева. Построение каждой ветви прекращается, если очередной вершиной окажется вершина с буквой К — конечный (по условию задачи) пункт путешествия. Тогда эта вершина для наглядности помечается другим цветом, жирностью шрифта, обводкой и т.п.

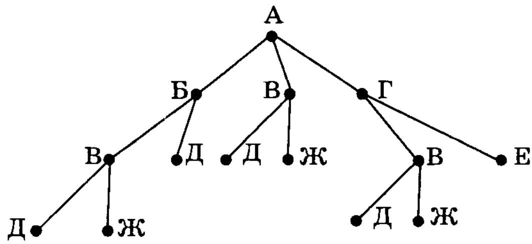
1. От вершины Б можно проехать к вершинам В и Д:



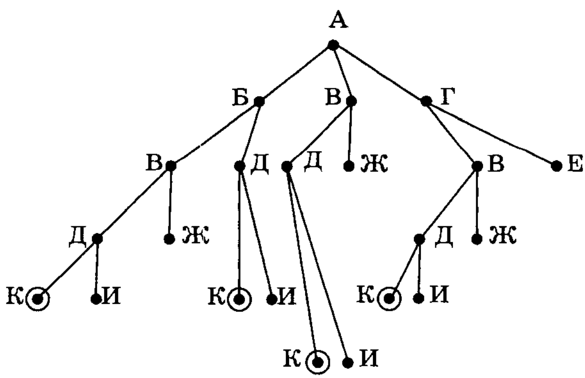
2. От вершины В можно проехать к вершинам Д и Ж, — построение ветвей повторяется дважды для обеих точек В:



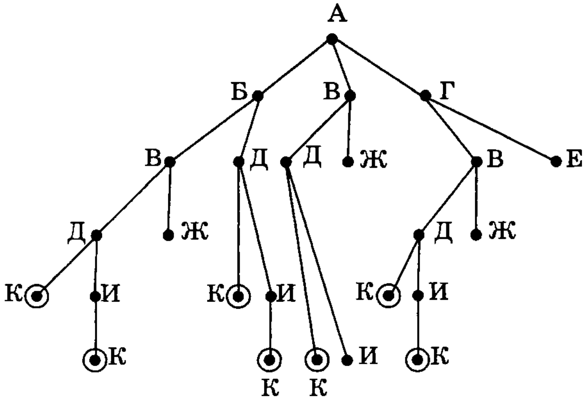
3. От вершины Г можно проехать к вершинам В и Е, при этом для точки В сразу копируются ранее построенные ветви:



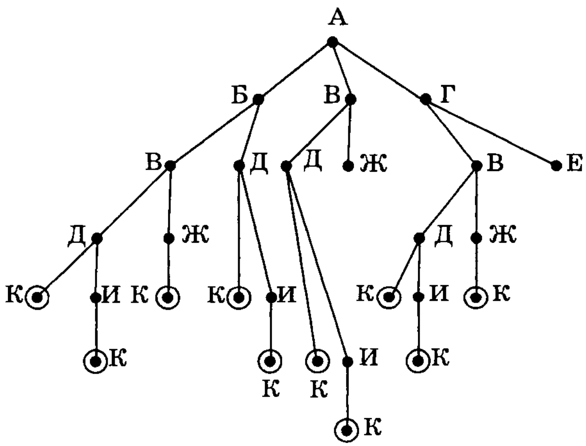
4. От вершины Д можно проехать к вершинам И и К, где К — конечная вершина:



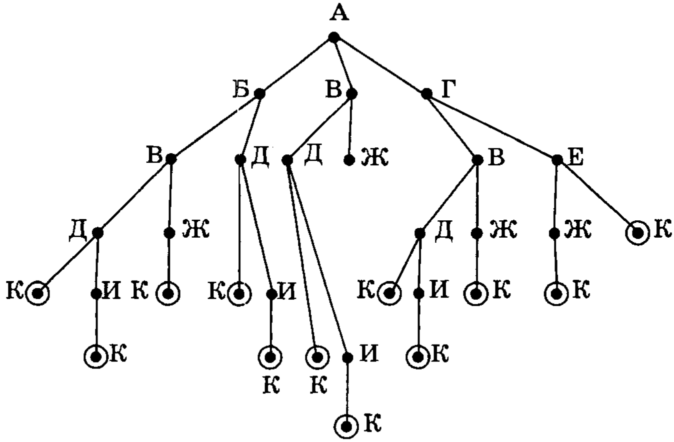
5. От вершины И можно проехать только к вершине К, т.е. достаточно вычертить только одну ветвь:



6. От вершины Ж тоже можно проехать только к вершине К:



7. Наконец, от вершины Е можно проехать к вершинам Ж и К, причём, от вершины Ж есть путь только к вершине К:



Все ветви построенного дерева завершаются конечной вершиной К, следовательно, оно содержит все возможные маршруты от А к К.

Количество возможных вариантов пути от А к К равно количеству «концевых» вершин К и равно 13 штук.

Ответ: 13 возможных вариантов пути.

Построение дерева вариантов — это универсальный метод решения задач с перебором возможных вариантов (действий, решений, ходов и пр.), обладающий высокой наглядностью и существенно уменьшающий риск пропуска возможных вариантов.

Задача 3*. Таблица стоимости перевозок устроена следующим образом: числа, стоящие на пересечениях строк и столбцов таблиц, означают стоимость проезда между соответствующими соседними станциями. Если пересечение строки и столбца пусто, то станции не являются соседними.

Стоимость проезда по маршруту складывается из стоимостей проезда между соответствующими соседними станциями.

Укажите таблицу, для которой выполняется условие: «Минимальная стоимость проезда по маршруту из E в B не более 5».

1)

	A	B	C	D	E
A		1	3		6
B	1			3	
C	3			4	
D		3	4		3
E	6			3	

3)

	A	B	C	D	E
A		3	4		7
B	3			4	
C	4				
D		4			1
E	7			1	

2)

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2			4	
C	4			2	
D		4	2		
E	6				

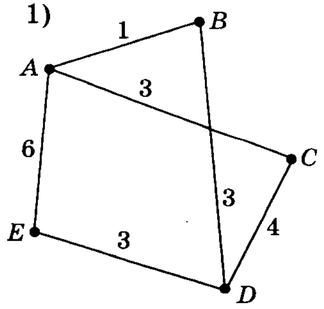
4)

	A	B	C	D	E
A		4	2		7
B	4			3	
C	2			6	
D		3	6		3
E	6			3	

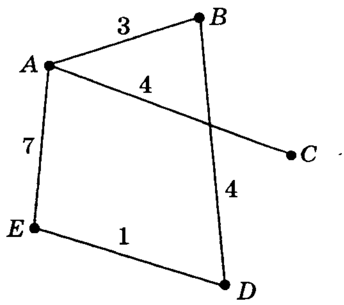
Решение

1. Поскольку графическое представление информации более наглядно, по заданным таблицам строятся соответствующие графы:

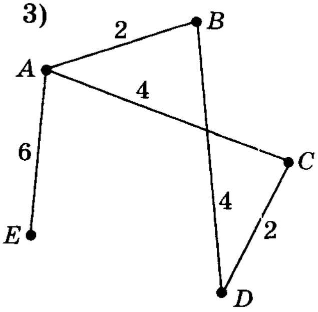
1)



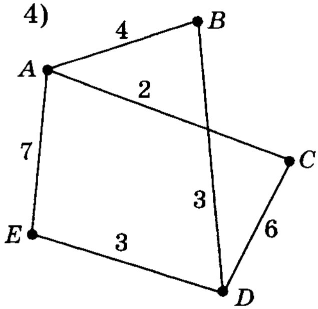
2)



3)



4)



2. Для каждого из четырёх полученных графов перебираются все возможные пути из E в B, подсчитывая суммарную стоимость проезда по каждому маршруту:

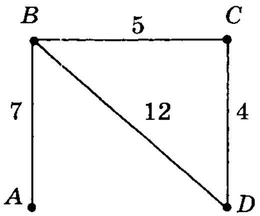
1) E-A-B (6 + 1 = 7); E-D-B (3 + 3 = 6);
   E-D-C-A-B (3 + 4 + 3 +1 = 11);
   E-A-C-D-B (6 + 3 + 4 +3 = 16);
2) E-A-B (7 + 3 = 10); E-D-B (1 + 4 = 5);
3) E-A-B (6 + 2 = 8); E-A-C-D-B (6 + 4 + 2 + 4 = 16);
4) E-A-B (7 + 4 = 11); E-D-B (3 + 3 = 6);
   E-A-C-D-B (7 + 2 + 6 + 3 = 18);
   E-D-C-A-B (3 + 6 + 2 + 4 = 15).

3. Определяется, для какого графа соблюдается условие «минимальная стоимость проезда по маршруту из E в B не больше 5»: очевидно, этому условию соответствует только вариант №2.

Ответ: вариант ответа №2.

⌛ Поскольку матрица смежности симметрична относительно её главной диагонали, достаточно анализировать только одну её часть (например, над главной диагональю).

Задача 4. Четыре города связаны дорогами, длина которых указана на схеме:



Следует определить, какие города наиболее удалены друг от друга (если считать по расстояниям между ними по дорогам). В качестве ответа указать *кратчайшее* расстояние между этими городами.

Решение (вариант 1)

Данное условие на первый взгляд кажется противоречивым: надо определить *наиболее удаленные* друг от друга города, но указать *кратчайшее* расстояние между ними. Однако это условие означает, что между каждой парой городов может быть *несколько* возможных путей проезда. Требуется определить из этих возможных маршрутов для каждой пары городов самые короткие, а затем сравнить их между собой и определить, какой из них имеет наибольшую длину.

То есть нужно найти самый длинный маршрут среди самых коротких.

1. Определяются все возможные маршруты для каждой пары городов и самые короткие среди них:

- ***AB* — 7** (единственный, он же — самый короткий);
- ***AC***: *ABC* – (7 + 5) = 12; *ABDC* – (7 + 12 + 4) = 23 (самый короткий — **12**);
- ***AD***: *ABD* – (7 + 12) = 19; *ABCD* – (7 + 5 + 4) = 16 (самый короткий — **16**);
- ***BC***: *BC* – 5; *BDC* – (12 + 4) = 16 (самый короткий — **5**);
- ***BD***: *BD* – 12; *BCD* – (5 + 4) = 9 (самый короткий — **9**);
- ***CD***: *CD* – 4; *CBD* – (5 + 12) = 17 (самый короткий — **4**).

Не всегда прямой путь — самый короткий!

2. Среди найденных кратчайших путей между каждой парой городов определяется наибольший:

AB	AC	AD	BC	BD	CD
7	12	**16**	5	9	4

Решение (вариант 2)

1. По заданному графу строится таблица. При этом если между парой городов возможно несколько путей, то в соответствующую ячейку таблицы записываются

все возможные значения длины пути. Поскольку таблица симметрична, достаточно заполнить её верхнюю часть.

	A	B	C	D
A		7	$ABC = 12$; $ABDC = 23$	$ABD = 19$; $ABCD = 16$
B			$BC = 5$; $BDC = 16$	$BD = 12$; $BCD = 9$
C				$CD = 4$; $CBD = 17$
D				

2. В каждой ячейке оставляется наименьшее из значений:

	A	B	C	D
A		7	12	**16**
B			5	9
C				4
D				

3. Выбирается наибольшее значение из числа находящихся в ячейках таблицы (отмечено жирным шрифтом).

Ответ: 16.